Fonction carré et fonctions polynômes du 2nd degré

Objectifs :

Les démonstrations et les exercices conseillés figurent à la fin du document.

- Découvrir la fonction carré et ses premières propriétés.
- Découvrir les fonctions polynômes du second degré et les problèmes s'y ramenant.

I La fonction carré

1. **Etude de la fonction carré :**

a) Définition : la fonction carré est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. A tout nombre réel x, on associe le carré de x.

b) Variations :

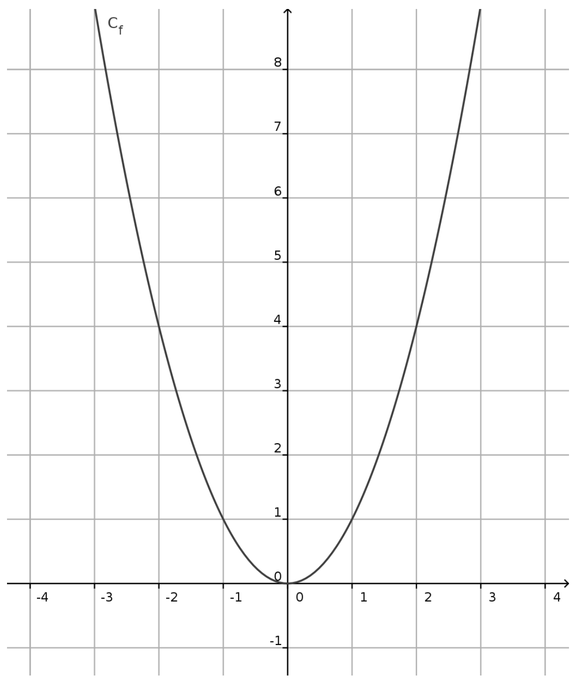
- La fonction carré est une fonction strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.
- La fonction carré est une fonction strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$.

c) Tableau de variations :

On obtient alors le tableau de variations :
Le minimum de la fonction carrée est 0 atteint pour $x = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
sens de f	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

d) Représentation graphique :



La courbe représentative de la fonction carré s'appelle une parabole.
L'origine du repère, le point O est le sommet de la parabole.

On remarque que cette courbe admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie ;
en effet :
Soit x un nombre réel, on a alors $(-x)^2 = x^2$; donc les points $M(x ; x^2)$ et $M'(-x ; (-x)^2)$ ont la même ordonnée et sont donc symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

2. Comparer des carrés :

a) Propriété : cette propriété se déduit du tableau de variations de la fonction carrée :

si $0 \leqslant a \leqslant b$, alors $a^2 \leqslant b^2$;
si $a \leqslant b \leqslant 0$, alors $a^2 \geqslant b^2$.

- Les carrés de deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que ces deux nombres.
- Les carrés de deux nombres négatifs sont rangés dans l'ordre inverse de ces deux nombres.

b) Résolution d'inéquations : Il s'agit de résoudre des inéquations de la forme $x^2 < a$ (ou $x^2 > a$, $x^2 \leqslant a$, $x^2 \geqslant a$) où a est un réel donné.
Exemples :

- résoudre l'inéquation $x^2 \leqslant 4$. D'après le graphique ou le tableau de variations, la solution est l'intervalle S = $[-2\ ;\ 2]$.

- résoudre l'inéquation $x^2 \geqslant 7$. D'après le graphique ou le tableau de variations, la solution est la réunion d'intervalles : S = $]-\infty\ ;-\sqrt{7}\ ] \cup [\ \sqrt{7}\ ;+\infty\ [$.

c) Encadrement de nombres : on cherche à encadrer une expression de x faisant intervenir des carrés à l'aide d'un encadrement de x.
Exemples : Soit $1 < x < 3$; trouver un encadrement de $2x^2 - 1$:

Encadrer $2x^2 - 3$ sachant que $-3 \leqslant x \leqslant -2$:

3. Les polynômes du second degré

a) Définition : les polynômes du second degré sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des nombres réels avec a non nul.

Le tableau de variations d'un polynôme du seconde degré :

Si $a > 0$			
x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
sens de f	$+\infty$ ↘	m	↗ $+\infty$

Si $a < 0$			
x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
sens de f	$-\infty$ ↗	M	↘ $-\infty$

b) Représentation graphique :

La représentation graphique d'un polynôme du second degré est une parabole.

Le sommet de la parabole a pour abscisse $\frac{-b}{2a}$ et la droite d'équation $x = \frac{-b}{2a}$ est un axe de symétrie de la parabole.

$f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si le nombre a est strictement positif, alors la parabole est tournée vers le haut, et la fonction f admet un minimum m atteint lorsque $x = \frac{-b}{2a}$.
- Si le nombre a est strictement négatif, alors la parabole est tournée vers le bas, et la fonction f admet un maximum M atteint lorsque $x = \frac{-b}{2a}$.

c) Exemples : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 6x - 5$.

On peut écrire $f(x) = (x + 3)^2 - 14$. Le sommet de la parabole a pour coordonnées $(-3 ; -14)$.

Comme $a = 1 > 0$, la parabole est tournée vers le haut, et la fonction f admet un minimum égal à -14 atteint lorsque $x = -3$.
Le tableau de variations de la fonction :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
sens de f	$+\infty$	$\searrow$	-14	$\nearrow$	$+\infty$

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 8x - 2$.

On peut écrire $g(x) = -2(x - 2)^2 + 6$. Le sommet de la parabole a pour coordonnées $(2 ; 6)$.

Comme $a = -2 < 0$, la parabole est tournée vers le bas, et la fonction f admet un maximum égal à 6 atteint lorsque $x = 2$.
Le tableau de variations de la fonction g :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
sens de g	$-\infty$	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$

Démonstrations :

Variations : Pour déterminer les variations de la fonction carré, on l'étudie sur deux intervalles distincts :

- sur $[0 ; +\infty[$: on considère deux nombres réels a et b de cet intervalle tels que a < b ;

alors $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$; le signe de $a + b$ est strictement positif puisque les deux nombres sont positifs et $a < b$; le signe de $a - b$ est strictement négatif puisque si $a < b$ alors $a - b < 0$.
Ainsi le produit $(a + b)(a - b)$ est strictement négatif, donc $a^2 - b^2 < 0$, donc $a^2 < b^2$; la fonction carré conserve l'ordre des nombres sur $[0 ; +\infty[$, donc c'est une fonction strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

- sur $]-\infty ; 0]$: on considère deux nombres réels a et b de cet intervalle tels que a < b ;

alors $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$; le signe de $a + b$ est strictement négatif puisque les deux nombres sont négatifs et $a < b$; le signe de $a - b$ est strictement négatif puisque si $a < b$ alors $a - b < 0$.
Ainsi le produit $(a + b)(a - b)$ est strictement positif, donc $a^2 - b^2 > 0$, donc $a^2 > b^2$; la fonction carré inverse l'ordre des nombres sur $]-\infty ; 0]$, donc c'est une fonction strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$.

Exercices conseillés :

Ex 17 à 20 page 80 - comparer et encadrer des carrés.
Ex 23 et 27 page 81 - comparer en utilisant le tableau de variation ou la courbe de la fonction carré.
Ex 29 et 30 page 82 - résoudre graphiquement des inéquations.
Ex 108 et 109 page 94 - reconnaître des courbes.
Ex 39 à 41 page 85 et 110 page 94 - dresser des tableaux de variations de fonctions polynômes du 2nd degré.
Ex 123, 125 et 131 page 97, 98 et 100 - résoudre des problèmes, mise en équation.

Exercices recommandés :

Ex de la fiche «exercices supplémentaires...» + «Sujet contrôle - Exercices supplémentaires fonctions carrés» depuis http://urbanmathproject.free.fr/documents.php - formes adéquates- formes canonique, etc..

Vidéos recommandées : https://youtu.be/KgsQI1ksdbA Méthode : Déterminer les coordonnées de l'extremum d'une fonction polynôme de degré 2